UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Centro de Ciências Físicas e Matemática

Curso de Licenciatura em Matemática

ASPECTOS DOS FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA

Autora: Camile Monique Probst

Orientador: Décio Krause

Florianópolis

Agosto de 2004

CAMILE MONIQUE PROBST

ASPECTOS DOS FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA

Trabalho acadêmico de graduação apresentado à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso II, do Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, da Universidade Federal de Santa Catarina

Professora: Carmen Suzane Comitre Gimenez

Florianópolis

Agosto de 2004

Agradecimentos

Que fique aqui registrado meu apreço e eterno agradecimento àqueles que, de alguma maneira, auxiliaram para que eu conseguisse atingir os objetivos deste trabalho:

- Ao Professor Décio, aceitando ser meu orientador, sem mesmo me conhecer, depositando em mim uma grande confiança; também por todo seu tempo dedicado a mim;
- À Professora Carmen, que muito me aconselhou e pela paciência frente aos transtornos ocorridos;
- Aos Professores Aldrovando e Taneja, por aceitarem participar da Banca Examinadora e não desistirem de tal tarefa;
- Aos meus familiares, em especial a meus pais, Edofredo e Margit, por estarem sempre ao meu lado, ajudando-me nas horas mais difíceis e renovando minhas forças para continuar;
- Aos meu amigos, que dedicam a mim muito carinho e compreensão, apesar de eu ter estado tão ausente.

Sumário

Introdução 02

1. O problema dos fundamentos 03
1.1. A Teoria dos Conjuntos 04

2. As escolas fundacionistas 07
2.1. Logicismo 07
2.1.1. O Paradoxo de Russel 08
2.2. Intuicionismo 09
2.3. Formalismo 11

3. O surgimento da lógica matemática 12
3.1. As lógicas não-clássicas 18

Conclusão 20

Referências Bibliográficas 21

Introdução

O interesse inicial de minha pesquisa baseava-se no estudo da lógica. Tendo pouco conhecimento nesta área, e devido ao tempo, que era razoavelmente curto, busquei encontrar outro ramo de estudo para o presente texto, sem no entanto perder de vista o meu interesse original. A lógica ficou, de certo modo, como pano de fundo do meu trabalho.

Após uma difícil tarefa de decidir qual o tema para o meu trabalho e de trocas de idéias com meu orientador, optei por buscar na história da matemática minha inspiração. Ao deparar-me com os problemas ocorridos nos fundamentos da matemática, percebi que, após anos de dedicação ao estudo da matemática, quase nada sabia sobre as dificuldades passadas até se atingir o grau de conhecimento matemático que hoje temos. Assim, ficou clara a direção a ser seguida.

Tento, na medida do possível, usar uma linguagem simples, uma vez que viso o interesse de alunos iniciantes do curso em buscarem neste trabalho um estímulo pela busca da história matemática. Não me agrada saber que, assim como eu, muitos outros estudantes terminem a licenciatura sem ter pelo menos uma pequena base histórica.

O presente trabalho está dividido em três capítulos. Cabe aqui dizer, que a idéia central desse texto concentra-se numa revisão bibliográfica. Portanto, convém acrescentar que, durante a evolução do mesmo, devido a minha falta de conhecimento, não entro em grandes detalhes na lógica propriamente dita.

No primeiro capítulo, elaboro uma seqüência dos acontecimentos até se chegar na crise dos fundamentos da matemática. Traço também um pequeno resumo sobre a teoria dos conjuntos.

No capítulo seguinte, é relevante dizer que não quero aqui discutir com profundidade cada uma das escolas fundacionistas, ou mesmo o fim que cada uma teve, mas apenas citar suas idéias principais e acréscimos no desenvolvimento dos fundamentos matemáticos, para então se chegar na matemática como hoje a conhecemos.

No terceiro, trabalho com o desenvolvimento da Lógica Matemática, onde, juntamente com a reestruturação ocorrida nos fundamentos da matemática, houve um grande progresso na lógica formal. Por eventuais semelhanças, desde já notifico que este capítulo baseia-se no livro de Nidditch, citado nas referências.

1. O problema dos fundamentos

Os trabalhos de Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), Isaac Newton (1642-1727), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), dentre outros, apesar de terem dado essenciais contribuições ao desenvolvimento da matemática, apresentaram, se os olharmos do ponto de vista atual, falhas relativas aos seus fundamentos. Isso ocorria, em grande medida, devido ao fato de que a maioria dos pesquisadores tinham seus interesses voltados nas aplicações de sua ciência, sendo poucos os que se preocupavam com os seus fundamentos.

Nesta época, vieram à tona muitas dificuldades pertinentes aos fundamentos da matemática. Constatou-se que a matemática passou por três grandes crises em relação aos seu fundamentos, como sustentam Fraenkel e Bar-Hillel (conforme Krause 2002, cap.3).

A primeira, ocorrida entre os séculos V a.C. e III a.C., subvide-se em duas classes. De um lado está o problema surgido na descoberta feita pela Escola Pitagórica, de entidades geométricas não comensuráveis, como hoje dizemos, a diagonal de um quadrado não é um múltiplo racional de seus lados, em outras palavras, constatou-se a irracionalidade da $\sqrt{2}$.

Do outro, vem o questionamento dos conceitos de tempo e espaço. Ou o espaço e o tempo são infinitamente divisíveis, e, nesse caso, o movimento é contínuo e de fluir suave; ou, então, são compostos de mínimos indivisíveis e, nesse caso, constituem uma sucessão de saltos diminutos. Os seguidores de Heráclito de Éfeso (536-470 a.C.) sustentavam que *tudo* está em movimento, seguindo a idéia acima descrita, enquanto Zenão de Eléia (490-425 a.C.) afirmava que o movimento não podia existir, uma vez que contradiz a si mesmo, pois não se podia percorrer uma dada distância.

São quatro os paradoxos de Zenão. Serão citados dois. Contra a primeira teoria, Zenão argumenta: "É impossível atravessar o estádio; porque, antes de se atingir a meta, deve-se primeiro alcançar o ponto intermédio da distância a percorrer; antes de atingir esse ponto, deve atingir-se o ponto que está a meio caminho desse ponto; e assim *ad infinitum*"[1]. Assim, seria preciso um tempo infinito para percorrê-lo. Argumentando contra a Segunda teoria, diz Zenão: "Um objeto está em repouso quando ocupa um lugar igual às suas próprias dimensões. Uma seta em vôo ocupa, em qualquer momento dado, um espaço igual

[1] ver [2] em Internet.

às suas próprias dimensões. Por conseguinte, uma seta em vôo está em repouso"[2]. Tais argumentos confundiram os filósofos da época e abalaram a 'teoria das proporções' e o 'método da exaustão' de Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.).

A segunda crise deu-se nos séculos XVII e XVIII. Embora o desenvolvimento do Cálculo tenha sido uma grande conquista dentro da matemática, surgem com ele novos paradoxos e contradições, agora sobre o conceito de *infinitésimo*. Dentro de um mesmo argumento, os infinitesimais eram tidos como quantidades nulas e não nulas, ou "infinitamente pequeno".

Para eliminar essa visível contradição, no século XIX, Augustin Louis Cauchy (1789-1857) e outros introduziram o conceito de limite, juntamente com os símbolos ε e δ. Desta forma, Cauchy, seguido por Karl Weierstrass (1815-1897), inicia um processo que formaliza os conceitos fundamentais da análise infinitesimal herdados do século XVIII. A *Aritmetização da Análise*, como ficou conhecida, é a redução dos princípios da análise aos conceitos aritméticos mais simples. Este esforço, trouxe aos fundamentos da matemática uma enorme contribuição.

Foi então que se iniciou um movimento de busca aos fundamentos da matemática. A partir daí, já no final do século XIX, devido ao desenvolvimento interno e à elaboração de modelos próprios, surge uma perceptível distinção entre a matemática e a física, uma vez que, até então, praticamente não havia uma separação entre estas disciplinas.

1.1. A Teoria dos Conjuntos

A Teoria dos Conjuntos, criada pelo matemático Georg Cantor (1845-1918), tornou-se o elemento central da estruturação do conhecimento matemático. Esta é uma das mais notáveis inovações matemáticas dos últimos séculos. Nessa teoria, Cantor apresenta demonstrações novas de fatos conhecidos e, ao lado disso, inúmeros fatos novos. A mesma contribuiu decisivamente para que se passasse a encarar, sob outra perspectiva, os problemas da matemática, desde os que surgem nos fundamentos da disciplina até os que são típicos de ramos especializados da álgebra, da análise e da geometria.

[2] ver [3] em Internet

Tentando, em poucas palavras, dar uma idéia sobre a obra de Cantor, resumimos informalmente a teoria dos conjuntos em pontos chaves:

1. *Conjunto* é uma coleção ou classe de objetos, também chamados de elementos ou membros.
2. A notação de *pertinência* serve para indicar que um elemento *x* pertence a um conjunto A e é denotado por $\mathbf{x \in A}$. Se ele não pertence a A, escreve-se $\mathbf{x \notin A}$.
3. Dois conjuntos são *iguais* se possuem exatamente os mesmos elementos (princípio da *extensionalidade*).
4. Conjunto *vazio* é o conjunto que não possui nenhum elemento e é denotado por $\varnothing$.
5. Os conjuntos podem ser *finitos* ou *infinitos*.
6. A *cardinalidade* de um conjunto A intuitivamente indica o número de elementos do conjunto e é denotada por $\# \mathbf{A}$.
7. Um conjunto não possui ordenação, portanto, os seguintes conjuntos são iguais:
$$\{\mathbf{2,5,8}\} = \{\mathbf{8,5,2}\} = \{\mathbf{5,5,8,2,8}\}.$$
8. Podemos representar o conjunto dos objetos que têm uma determinada propriedade P assim:
$$\boldsymbol{S} = \{\ \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{P(x)}\ \}$$
Por exemplo: $\mathbf{S} = \{\ \boldsymbol{i} \mid \boldsymbol{i = 2n + 1 \text{ e } n \in N}\ \}$
define o conjunto dos números ímpares.
9. Um conjunto *unitário* possui um único elemento.
10. Um conjunto A é dito estar contido em B (escreve-se $\mathbf{A \subseteq B}$) se, e somente se, todo elemento de A é elemento de B, desta forma, A é *subconjunto* de B.
11. Um conjunto A é igual a um conjunto B (escreve-se $\mathbf{A = B}$) se, e somente se, $\mathbf{A \subseteq B}$ e $\mathbf{B \subseteq A}$.
12. Um conjunto A está contido propriamente no conjunto B (escreve-se $\mathbf{A \subset B}$) se, e somente se, $\mathbf{A \subseteq B}$ e $\mathbf{A \neq B}$. Desta forma A é subconjunto próprio de B e, caso contrário, é subconjunto impróprio. [3]

O próprio Cantor encontra falhas na sua teoria dos conjuntos . Já em 1985, tinha encontrado uma antinomia em sua teoria, que mais tarde, a cerca de 1897, Cesare Burali-Forti (1861-1931) apresentou o paradoxo que diz respeito à coleção de todos os ordinais.

A terceira crise relaciona-se justamente com o surgimento desse e de outros paradoxos, ou antinomias, nos fundamentos da teoria dos conjuntos e, consequentemente, de toda a matemática.

---

[3] ver [1] em Internet.

O paradoxo de Cantor é outra falha encontrada na sua teoria, falha esta mais simples e mais fundamental sobre conjuntos. Em carta a Richard Dedekind (1831-1881), Cantor observa que não se pode falar, sem cair em contradição, da classe do todos os conjuntos cardinais como formando um conjunto, ou mesmo do ‘conjunto de todos os conjuntos’.

Porém, o que mais retratou a falta de bases sólidas para os fundamentos da teoria dos conjuntos, foi o Paradoxo de Russell, tratado adiante com mais clareza. Logo após, compreende-se que as demais antinomias eram, na verdade, contradições na obra de Cantor, e que era necessário rever os seus fundamentos.

2. As escolas fundacionistas

Em função das indagações acima descritas, propicia-se o aparecimento de “correntes” filosóficas. Cada qual oferece sua visão sobre a natureza matemática e propõe uma maneira de fundamentá-la. Três “escolas” que se destacam são: os logicistas, associados com Russell e Frege; os intuicionistas, conduzidos por Brouwer; e os formalistas, chefiados por Hilbert. Elas não constituem as únicas, mas só historicamente mais relevantes. Atualmente, há outras versões.

2.1. Logicismo

O filósofo alemão Gottlob Frege (1848-1895) com em sua obra *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884) relaciona a aritmética com a lógica, reduzindo o conceito de número natural a uma combinação de conceitos meramente lógicos. Com a obra de Frege aparece uma linha de fundamentação da aritmética, através da lógica.

Essa tentativa de reduzir a matemática à lógica, traduziu-se num programa, ou filosofia matemática, conhecido como logicismo. Apesar de Frege ter apresentado as teses centrais desta corrente, o líder do logicismo é Bertrand Russell (1872-1970).

Frege defendia a tese de que a matemática é um ramo da lógica, tese à qual Russell aderiu decididamente, mesmo tendo encontrado falhas na obra de Frege. Em 1901, por carta, Russell expunha a Frege uma antinomia que, segundo este, derrubava os fundamentos de suas Leis fundamentais, uma obra cujo segundo volume estava para ser lançado.

Também destaca-se nessa época, o trabalho de Giuseppe Peano (1858-1932), que, em 1889, com somente três conceitos primitivos e cinco postulados, conseguiu mostrar a construção da teoria ordinária dos números naturais. Os *axiomas de Peano*, assim denominados, foram desenvolvidos depois que se percebeu que a análise matemática estava fundamentada sobre o conceito de número natural. Embora seu trabalho pareça simples, ele é de grande utilidade. Para se ter uma idéia, pode-se deduzir todas as proposições usuais da aritmética elementar através dos seus axiomas.

2.1.1. O Paradoxo de Russell

Na publicação do segundo volume de sua obra, Frege acrescentou um apêndice ao livro como resposta a esta descoberta de Russell. “Dificilmente poderá suceder a um cientista uma coisa mais infeliz do que Ter um dos seus fundamentos do seu edifício abalado depois de ter terminado a obra.”[4]

Um pouco mais adiante, Frege enuncia o paradoxo encontrado por Russell:

> “Ninguém dirá que a classe dos homens é um homem. Temos aqui uma classe que não pertence a si própria. Digo que qualquer coisa pertence a uma classe quando pertence ao conceito cuja extensão é essa classe. Concentremo-nos agora no conceito *classe que não pertence a si própria*. A extensão deste conceito (se podemos falar da sua extensão) é assim a classe das classes que não pertencem a elas próprias. Abreviadamente chamar-lhe-emos a classe K. Vejamos agora se a classe K pertence a si própria. Primeiro suponhamos que pertence. Se uma coisa pertence a uma classe então pertence ao conceito cuja extensão é essa classe. Assim, se a nossa classe pertence a si própria é uma classe que não pertence a si própria. A primeira suposição conduz assim a uma auto-contradição. Em segundo lugar, suponhamos que a classe K não pertence a si própria; então pertence ao conceito cuja extensão é a própria classe, e assim pertence a si própria. E aqui uma vez mais temos uma contradição.”[5]

Em linguagem atual, o Paradoxo de Russell pode ser assim descrito: Considere o conjunto y de todas as entidades que não são membros de si próprias, ou seja, $x \in y$ se, e somente se $x \notin x$ (a coleção de Russell). Deduz-se que $y \in y$ se, e somente se, $y \notin y$.

Segundo Russell, o paradoxo surge por existir uma violação do princípio do círculo vicioso. Em colaboração com Alfred North Whitehead (1861-1947), Russell desenvolve a obra *Principia Mathematica*, em três volumes, publicados respectivamente em 1910, 1912 e 1913. Assim, reformula e recupera o programa logicista de Frege baseando-se para isso no bloqueio dos círculos viciosos através da doutrina dos tipos lógicos. Resulta daí a denominada *teoria dos tipos*.

A teoria dos tipos pode ser assim descrita: “Relativamente aos conjuntos, tem-se, primeiro, os indivíduos (tipo zero); depois, classes de indivíduos (tipo 1); em seguida

---

[4] Kneale e Kneale 1991, p.658, cap. XI

[5] Kneale e Kneale 1991, p.659, cap. XI

classes de classes de indivíduos (tipo 2); etc.; e toda classe deve pertencer a um tipo determinado de hierarquia."[6]. Desta maneira, são eliminados os paradoxos de Russell e de Cantor, assim como também são excluídos as demais antinomias encontradas na teoria dos conjuntos.

Embora tenha sua eficácia comprovada, essa teoria se revelou uma fórmula problemática de desenvolver a teoria dos conjuntos, em função de ser muito restritiva.

Não querendo sacrificar importantes capítulos da matemática clássica, Russell formulou o chamado *axioma da redutibilidade*, conseguindo contornar, desta maneira, os obstáculos surgidos. "Segundo o axioma da redutibilidade, dada qualquer propriedade de ordem maior que zero, existe uma propriedade de ordem zero que lhe é equivalente."[7]

No entanto, o axioma da redutibilidade, dito de modo breve, "nada teria de lógica", ou seja, seria algo artificial que não poderia ser reduzido a uma lei lógica, o que colocara em xeque o programa logicista de Russell.

2.2 Intuicionismo

Os intuicionistas, também chamados de construtivistas, trataram o problema dos fundamentos da matemática de uma forma totalmente diferente da dos logicistas. Enquanto estes consideravam que nada havia de errado com a *matemática clássica*, sendo os paradoxos originados por erros dos próprios matemáticos, os intuicionistas viam estas contradições como claras indicações de que a matemática clássica estava longe de ser perfeita.

A idéia geral presente como base da escola intuicionista é, como o próprio nome sugere, o papel central desempenhado pela intuição. Segundo seus membros, até os princípios lógicos não escapariam à intuição. Essa linha de pensamento atribui prioridadade à intuição intelectual ao invés de atribuí-la à lógica.

Leopold Kronecker (1823-1891), precursor do intuicionisto, criticava violentamente a teoria de Cantor e a aritmetização da análise. Como era por ele afirmado, "Deus nos deu

---

[6] da Costa 1962, p. 18, cap. I

7 da Costa 1962, p. 18, cap. I

os números naturais, e o resto é obra dos homens.” [8]

Kroneker se opõe as teorias de Cantor e a aritmetização da análise, devido ao uso da teoria sobre os números reais. Segundo ele, o conjunto dos números reais não existe, uma vez que não podiam ser construídos. Para Kroneker, uma coleção infinita era inaceitável, uma vez que “em matemática, tudo deveria ser intuitiva e efetivamente construído pelo matemático, a partir dos números naturais, tidos como claros e intuitivos.” [9]

Embora o conjunto dos números naturais também seja infinito, existe um primeiro elemento e uma lei de formação, onde adiciona-se uma unidade a cada elemento para se alcançar o seguinte, obtendo-se assim tantos elementos quanto desejarmos, apesar de que não se possa construir todos esses números.

Em 1908, Luitzen Egbert Jan Brouwer (1881-1966) leva as teses de Kroneker ao extremo. Para Brouwer não é a experiência nem a lógica que determina a coerência e aceitabilidade das idéias, mas sim a intuição. Profundamente influenciado pela teoria de Immanuel Kant (1724-1804), Brouwer sustenta que os números naturais nos são dados por uma intuição fundamental que é o ponto de partida de toda a matemática. Concebe o pensamento matemático como um processo de construção mental que, partindo dos números naturais, prossegue através de um número finito de passos e é independente da experiência.

O lógica intuicionista também não aceita que o princípio do terceiro excluído tenha valor. Assim, os intuicionistas tiveram que elaborar novos métodos de investigação. Apesar de terem chegado a importantes resultados, convém notar uma grande lição deixada por essa corrente. A partir dela, especialistas em fundamentos da matemática não mais buscaram tendências tão radicais, mesmo porque, por exemplo, se o intuicionismo prevalecesse, a até então ciência matemática seria totalmente desfigurada.

Por tudo isto, a comunidade matemática considerou, quase universalmente, o programa intuicionista pouco razoável e algo fanático.

No entanto, a filosofia intuicionista é ainda hoje algo a ser levado a sério, pois está na base da chamada *matemática construtivista* e a lógica intuicionista é importante em computação. Ademais, a moderna teoria física da gravitação em *loop*, surgida nos últimos anos, faz uso do conceito matemático de *topos*, cuja lógica associada é a lógica intuicionista.

---

[8] da Costa 1962, p. 21, cap. II

2.2. Formalismo

A escola formalista, criada por volta de 1910 por David Hilbert (1862-1943), tinha por grande objetivo encontrar uma técnica matemática por meio da qual se pudesse demonstrar, de uma vez por todas, que a matemática estava livre de contradições.

Os axiomas lógicos assumidos por Hilbert não são essencialmente diferentes daqueles de Russell. No entanto, pelo fato, segundo Hilbert, de que não se pode deduzir a matemática apenas a partir da lógica, uma vez que a matemática não é uma conseqüência da lógica e sim uma disciplina autônoma, cada ramo deve ter os axiomas apropriados de ambos, matemática e lógica. Assim, introduziu uma linguagem formal e regras formais de inferência em número suficiente para que toda a "demonstração correta" de um teorema clássico pudesse ser representado por uma dedução formal com cada passo mecanicamente verificável.

Com o formalismo a Matemática torna-se um sistema formal que, partindo dos axiomas e dos termos iniciais, se desenvolve numa cadeia ordenada de fórmulas, mediadas por teoremas, sem nunca sair de si mesma. Torna-se nem mais nem menos, do que "um jogo linguístico" fundado exclusivamente nas próprias regras do jogo. Neste contexto, fazer matemática consiste em manipular símbolos sem significado de acordo com regras sintáticas explícitas.

Em 1931, Kurt Gödel (1906-1978) enunciou o *teorema da incompletude* evidenciando que nunca se poderia encontrar em matemática uma certeza completa por meio de qualquer método baseado na lógica tradicional, uma vez que "existem proposições aritméticas tais que nem elas, nem suas negações, são demosntráveis na axiomática da aritmética que se adotar"[10]. Os resultados alcançados por Gödel mostraram que o projeto de Hilbert era irrealizável e, assim, o programa formalista também não conseguiu provar a certeza dos métodos matemáticos.

---

9 da Costa 1962, p. 21, cap. II

10 da Costa 1962, p. 38, cap. III

3. O surgimento da lógica matemática

Durante grande parte desta seção estaremos fazendo um breve resumo do livro *The Development of Mathematical Logic*, de P.H. Nidditch.

Falando por alto, a Lógica Matemática é o resultado da combinação de quatro linhas diferentes de pensamento. São elas: a velha lógica, a invenção de Aristóteles, a idéia de uma completa e automática linguagem de raciocínio, que remonta a Descartes e Leibniz, os desenvolvimentos de álgebra e geometria, que surgiram após 1825, e a idéia de partes da matemática como sistemas dedutivos, as quais são correntes de raciocínio de acordo com as regras da lógica.

Existem pelo menos cinco aspectos dos escritos de Aristóteles (384-322 a.C.) sobre lógica: discussão da linguagem comum, com relação aos tipos de palavras e as suas ligações com as ordens possíveis de existência; um rol de sugestões na arte do argumento; um grupo de ensinamentos no modo científico; um número de posições para a organização correta de um sistema; e uma teoria sobre a forma de um certo raciocínio, nomeado por Aristóteles de *Silogismo*. É nesta última teoria que se pensa quando se fala na “velha lógica”, “lógica comum” ou a “lógica de Aristóteles”, a qual foi importante para o começo e crescimento da Lógica Matemática.

Uma dedução é um tipo de relação, na qual uma dada sentença é obtida a partir de outras dadas sentenças, tidas como hipóteses ou premissas. A dedução só é válida quando a conclusão é verdadeira sempre que todas as premissas são verdadeiras.

Na lógica Aristotélica, apenas quatro tipos de sentenças podem ser usados. São sentenças gerais as quais têm a estrutura: “todo o S é P”, “nenhum S é P”, “algum S é P” ou “algum S não é P”. Na opinião de Aristóteles os únicos nomes cabíveis numa sentença geral são nomes gerais como “homem”, “flor” e “verde”.

O Silogismo no sentido de Aristóteles é uma teoria de implicações silogísticas. Uma implicação silogística é aquela com duas premissas e uma conclusão as quais são sentenças gerais como as acima. O que Aristóteles quis fazer foi dar um completo conjunto de diferentes formas de implicações silogísticas e um completo rol de regras como teste da validade de qualquer implicação silogística dada. Hoje, fica claro que a teoria de Aristóteles não está livre de erros, mas, certamente, foi um grande começo. Por centenas de anos quase ninguém ousou questionar a veracidade de sua teoria. É verdade que o trabalho dos escolásticos, que seguiram Aristóteles, não se limitava ao silogismo. No entanto, sua lógica baseava-se em regras cujas sentenças eram formuladas na linguagem cotidiana; nenhum sinal especial para as operações de raciocínio foi usado e eles pareciam não ter idéia de que era possível para a lógica tornar-se um tipo de matemática. Então eles não tiveram a iniciativa de tornar a lógica uma Lógica Matemática, o que teria sido difícil já que eles as mantinham separadas.

As leis do silogismo são gerais e elas são válidas com relação às estruturas e não aos exemplos materiais de implicações. A maneira de torná-las gerais é pelo uso das variáveis, que são letras as quais são sinais para toda e qualquer coisa em uma certa gama de coisas: qualidades, substâncias, relações, números ou qualquer outra forma de existência. Só depois de Boole, que viu no velho silogismo as sementes de uma álgebra lógica, que um passo importante foi dado transformando o silogismo em um certo raciocínio matemático. Somente quando a lógica "casou" com a matemática é que tornou-se fértil. A lógica como pobre relação da filosofia acabou e a mudança foi tão grande que a nova lógica foi muito disseminada e respeitada, tanto que alguns disseram ser a parte da filosofia de maior interesse e valor por ser a única em que o verdadeiro conhecimento é possível.

Contribuições importantes à lógica foram dados pelas escolas megárica e estóica. Ainda que seus tratados não tenham tido grande influência, e nem recebido o merecido destaque, em grande parte porque permaneceram desconhecidas até o século XIX e foram sobrepujadas pela influência escolástica e aristotélica. A lógica megárica e estóica é diferente da aristotélica em duas formas. Primeiro, por se interessar nas formas de raciocínio conforme a estrutura mais usual de um argumento, do que aquele dado pela silogística. Segundo, e mais importante, era uma lógica de conexões de sentenças que trazia já o esforço do que hoje denominamos de cálculo proposicional, envolvendo conectivos, como os conectivos lógicos que usamos hoje em dia, ao passo que a silogística se atinha a trabalhar com proposições gerais da forma mencionada acima, que essencialmente se reduziam ao esquema "sujeito-predicado".

Um passo importante foi dado no sentido da criação de uma completa e automática linguagem de raciocínio, feito por Ramon Lull (1235-1315), por volta de 1270, em seu livro *Ars Magna*. Acreditava ele que todo o conhecimento das ciências resulta da combinação de um número de idéias primárias: o conhecimento seria um complexo do simples. Haveria apenas 54 idéias primárias, que agrupadas tornavam-se a *Ars Magna*. Lull não aprofundou seu trabalho e não determinou muitas regras para julgar a validade do conhecimento de diferentes complexos possíveis. Ele acreditava que nenhum conhecimento científico tem necessidade da experiência como um guia e um apoio, como se a descoberta e o teste da descoberta do que está no fundo do mar possa ser feito sem se sair da terra. Por pensar assim, Lull representou grande parte do pensamento da época, que remontava aos gregos antigos.

Depois das sugestões de Lull, um pensamento sobre uma linguagem geral para uma ciência geral tornou-se comum em filosofia. Mas o esboço de uma tal linguagem só surgiu por volta de 1660, quando *Ars Signorum* de George Dalgarno (1626-1687) e *o Essay Towards a Real Caracter and a Philosophical Language* de John Wilkins (1614-16672) foram publicados. O objetivo de Wilkins era criar uma lista de todas as coisas e idéias nas quais marcas ou nomes poderiam ser colocados de acordo com suas propriedades naturais. Quanto menor e mais simples fosse o conjunto de regras naturais, melhor. Wilkins tinha três pontos de vista: as regras de sua linguagem eram para ser "naturais"; as diferentes palavras eram para ser tanto formadas quanto dependentes umas das outras; e as formas dos nomes eram para ser ordenadas por letras e sons.

O grande trabalho que Wilkins enfrentou para fazer de sua linguagem um instrumento da ciência, foi completamente em vão. Uma razão para isso, foram as descobertas na ciência e as mudanças no conhecimento comum, que não se adaptaram ao seu esboço de linguagem. Outra razão é que o poder da linguagem, de dar e receber conhecimento natural, era supervalorizado por ele. Linguagens como as da matemática têm grandes poderes de aumentar e ordenar o conhecimento, mas esse conhecimento é de possíveis relações entre coisas, e não entre fatos. Wilkins não se deu conta de que, se a linguagem projetada era para ser usada como ele estava imaginando, isto seria um tipo de aritmética ou álgebra. Entretanto, aparentemente ele não conhecia o suficiente de matemática para fazer os desenvolvimentos necessários para este novo propósito.

Descartes (1596-1650) foi, aparentemente, a primeira pessoa a ter a idéia de uma linguagem geral como um tipo de aritmética. Sabiamente, Descartes não fez esforços para dar a lista de todos os nossos simples pensamentos, nem de colocá-los em ordem, possibilitando a formação de um raciocínio aritmético. Pouco depois, Leibniz (1646-1716) fez projetos para uma linguagem nova e geral, não diferente da de Descartes, mas ele foi além destes, como pode ser visto em *Ars Combinatória*, publicado em 1666, onde Leibniz sugeriu idéias matemáticas para obter um "cálculo para raciocinar", mesmo em filosofia.

Mais tarde, Leibniz disse ser forçado por um tipo de direção interior para o lado que "a invenção de um ABC de pensamentos humanos era preciso, e colocando juntas as letras deste ABC e separando as palavras formadas pelo mesmo, nós teríamos um instrumento de descoberta e teste de tudo".

Entre 1825 e 1900, álgebra e geometria passaram por grandes mudanças. Estas mudanças tiveram forte efeito em todas as partes e estágios do crescimento da lógica matemática. Até 1825, ou pouco depois disso, álgebra não era nada além de uma teoria de equações onde letras eram usadas como números e sinais eram usados para as quatro operações de adição, divisão e seus opostos. Não existe a indicação de que regras eram necessárias ou ajudariam o desenvolvimento da álgebra.

A necessidade de ser conscientemente guiado pelas leis da álgebra só foi vista por Peacock (1791-1858). No seu livro *A Treatise on Algebra* (1830), a idéia principal era que álgebra é uma ciência de deduções, como a geometria. Peacock tinha dois pontos principais. Primeiro, todos os processos da álgebra têm que ser baseados num conjunto de leis sobre as operações usadas nesses processos. Segundo, os sinais para as operações não têm mais sentido do que aqueles dados a eles pelas leis. A linha de dedução é limitada, mas pode ser ampliada tanto quanto for desejado, se mantidos dentro das leis. Deste ponto de vista surgiu um novo tipo de álgebra, hoje chamada de álgebra abstrata.

Outro movimento em direção a álgebra abstrata, para longe dos limites da antiga teoria de equações foi a descoberta de Niels Henrik Abel (1802-1829) e outros que a obtenção de valores numéricos para equações de grau maior ou igual a 5 são geralmente inválidos dentro da aritmética. A descoberta de Abel trouxe sérios danos para as teorias de então, tendo uma vasta conseqüência nos os campos da ciência e da filosofia. Esta nova proposta teria que ser tomada passo a passo, não apenas na matemática mas também nas ciências naturais.

Évariste Galois (1811-1832) tentando dar uma base para as proposições de Abel, teve a idéia do conceito de grupo, e viu algumas importantes propriedades no uso de grupos. A Teoria de Grupos veio rapidamente se tornar o primeiro ramo da álgebra abstrata.

Quem iniciou a lógica matemática foi George Boole com sua obra *Mathematical Analysis of Logic* (1847). Em seu livro Boole não sai da linha de pensamento difundida até então, mas vinculou lógica e álgebra de um modo importante e definitivo.

Os primeiros ensinamentos em lógica de que Boole teve conhecimento, e que tiveram um efeito sobre ele eram, foram, de um lado, aqueles da velha lógica e, do outro, aqueles de

Willian Hamilton (1788-1856) e Augustus De Morgan (1806-1871). A teoria de Hamilton-De Morgan tornou possível uma visão da lógica como sendo uma álgebra de classes. Boole foi quem primeiro teve uma visão clara disso, e em seu trabalho, propõe a lógica baseada na matemática, principalmente em álgebra.

Em *The Mathematical Analysis of Logic* Boole diz que a consistência da validez dos processos da análise matemática não dependente da leitura dos símbolos utilizados, mas apenas das leis pelas quais estes símbolos são regidos, que espelham leis algébricas.

As idéias de Boole sobre a lógica da álgebra foram dadas em 1854 no livro *The Laws of Thought*. Algumas das regras de sua álgebra foram guiadas por idéias na matemática mais do que pelas necessidades de uma teoria boa da lógica. Este livro acabou explicitando alguns dos erros nas idéias de Boole, assim como deu força a outras partes de sua teoria sobre álgebra abstrata.

A chamada álgebra de Boole foi aprimorada por vários pesquisadores, entre William Stanley Jevons (1835-1882), Charles Sanders Peirce (1839-1914) e Ernst Schroeder (1841-1902). O resultado mais importante foi a apresentação do cálculo algébrico de uma forma axiomatizada.

Frege foi o primeiro a formular com precisão a diferença entre variável e constante, assim como o conceito de função lógica, a idéia de uma função de vários argumentos, o conceito de quantificador. A ele se deve uma conceituação muito maior do sistema axiomático.

Os lógicos tradicionais estavam basicamente interessados na solução de problemas tradicionais de lógica, como, por exemplo, a validade de raciocínios. O objetivo de Frege era mais amplo, e acabou derivando para uma filosofia da lógica e da matemática que influenciou diretamente a Russell e Hilbert.

Frege desejava provar que não somente o raciocínio usado na matemática, que, achava ele, eram dedutíveis àqueles da aritmética, mas também os princípios subjacentes, ou seja, toda a aritmética, são pura lógica. Porém ele expressou suas buscas e resultados em uma notação matemática muito árdua. O maior mérito de Frege foi elaborar uma concepção lógica mais abrangente do que a lógica de Aristóteles, na verdade criando a lógica matemática como a entendemos hoje.

Frege construiu um sistema especial de símbolos para desenvolver a lógica de maneira exata e foi muito além das proposições e dos argumentos. Em suas grandes obras, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkes* e

Die Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet, está contida de modo explícito e plenamente caracterizada uma série de conceitos (conectivos, função, função proposicional, quantificadores, etc.) que seriam vitais para a Lógica Matemática a partir de então.

Peano tinha objetivo semelhante a Frege, só que mais realista. O que motivou o trabalho de Peano foi o desejo de expressar toda a matemática em termos de um cálculo lógico. Com isso, desenvolveu uma linguagem formalizada que continha não só a lógica matemática, mas todos os ramos mais importantes dela. Em 1889, introduz uma sistema de axiomas para a aritmética dos números naturais.

Foi através do contato com a obra de Frege, que Russell procurou levar avante a idéia de construir toda a matemática sobre bases lógicas, convencido de que ambas são idênticas. Os postulados fregeanos foram incorporados por Russell, que estendeu as teses logicistas de Frege e às demais disciplinas matemáticas com a formulação da sua Teoria de Tipos.

Gödel, ao publicar seus *teoremas de incompletude*, faz surgir vários resultados fundamentais e muito importantes. Ao longo da demonstração do seu teorema, Gödel rompeu um limiar crucial entre a lógica e a matemática. Ele mostrou que, por mais complexa que se torne a matemática (ou qualquer outro sistema formal redutível a ela), ela pode sempre ser expressa em termos de operações a serem executadas sobre números naturais, e as partes do sistema poderão ser manipuladas por regras de contagem e comparação. Os *teoremas da incompletude* de Gödel, pode-se considerar, são a demonstração de que há algumas funções sobre os naturais que não podem ser representadas por um algoritmo descrito por meio de números naturais.

Alfred Tarski (1902-83), em 1933, ao examinar o conceito de verdade nas linguagens formalizadas forneceu (ou pretendeu fornecer) uma definição precisa de verdade (do ponto de vista da teoria da correspondência) inaugurando assim os estudos semânticos e criando o que hoje entendemos por teoria dos modelos. Os trabalhos de Tarski, de certo modo, retornam à álgebra da lógica de Boole e seguidores, só que de um ponto de vista novo e mais amplo, contribuindo para o desenvolvimento de uma das mais importantes áreas da lógica atual, a lógica algébrica, muito estudada principalmente pelos matemáticos poloneses no século XX.

3.1. As lógicas não-clássicas

No século XX, uma das mais importantes contribuições ao desenvolvimento da lógica se deu com a criação das lógicas não-clássicas. Dito de modo breve, por lógica clássica entendemos o chamado cálculo de predicados de primeira ordem, com ou sem igualdade, ou alguma de suas extensões, tal como o cálculo de predicados de ordem superior (teoria de tipos) ou mesmo algum sistema de teoria de conjuntos, como Zermelo-Fraenkel, von Neumann-Bernays-Gödel, Tarski-Kelley-Morse ou o sistema ML de Quine-Wang, levando-se em conta possíveis variantes desses sistemas relativamente ao uso de símbolos e/ou axiomas (ver Krause 2002, cap. 5).

Devido à imprecisão que há em se delimitar a lógica clássica, haverá igualmente uma imprecisão em qualquer conceituação das lógicas não-clássicas. Mesmo assim, podemos dizer que as distinções entre as lógicas clássicas e a não-clássica residem basicamente nos seguintes itens:

i. As lógicas não-clássicas podem estar baseadas em linguagens mais ricas em capacidade de expressão do que as linguagens da lógica clássica.

ii. Podem ser fundamentadas em princípios distintos

iii. Podem ser caracterizadas por terem semântica distinta da usual.

O primeiro caso aparece, por exemplo, nas chamadas lógicas modais usuais, cuja linguagem estende a linguagem da lógica clássica de modo a incorporar operadores intensionais que permitem exprimir os conceitos de necessidade e possibilidade. Da mesma forma, nas lógicas deônticas usuais, há operadores que permitem exprimir os conceitos de obrigatoriedade e proibição. As lógicas temporais nas quais a noção de tempo é tratada, as lógicas da crença, onde se pode falar em ‘acreditar (em) uma proposição’, e assim por diante, constituem outros exemplos desse tipo de lógicas.

O caso (ii) ocorre por exemplo com a lógica intuicionista, a qual, grosso modo, é obtida a partir da lógica clássica pela rejeição do princípio do terceiro excluído. Nas lógicas paraconsistentes, o princípio da contradição é restringido, e nas lógicas não-reflexivas, o conceito usual de identidade (tal como tratado pela lógica clássica) sofre algum tipo de restrição, como por exemplo, pode-se admitir que a identidade carece de sentido para certas entidades. Ademais, pode-se ter, por exemplo, lógicas pararaconsistentes deônticas, nas quais não somente não vale em geral o princípio da contradição, como aparecem os conceitos de obrigatoriedade e de proibição, dentre outros. Em todos esses casos, semânticas distintas da usual são requeridas, de forma que os três itens acima acham-se relacionados.

Há ainda outras lógicas as quais é difícil de enquadrar em algum dos itens acima, como as lógicas *fuzzy* , a lógica linear, as várias lógicas quânticas ou sistemas que diferem profundamente da lógica clássica tanto em aspectos sintáticos como em aspectos semânticos, como os sistemas de Lesniewski, as lógicas infinitárias ou as combinatórias. Não obstante, a classificação dada pode ser usada em uma primeira aproximação.

As lógicas que satisfazem (i) são chamadas de *complementares* da clássica. Por exemplo, as lógicas modais, temporais, deônticas, epistêmicas, erotéricas, imperativas, intensionais, as que incorporam operadores para formar termos ligando variáveis (os chamados *v.b.t.o.*s)[11] e as lógicas condicionais.

Aquelas que obedecem (ii) são as lógicas *heterodoxas*, evitaremos chamá-las de *rivais* da lógica clássica, como às vezes se faz, como as lógicas intuicionistas (há na verdade várias delas), as intuicionistas sem negação, as relevantes, as paraconsistentes, as polivalentes, as lógicas livres, as não-reflexivas, etc.

Em nosso estudo,não tivemos condições de nos aprofundar no estudo dessas lógicas. Importante foi nos apercebermos de sua importância e de estarmos cientes de que trata-se de tema que merece estudo mais aprofundado.

[11]Abreviação para “variable binding term operators” em inglês.

Conclusão

Nosso trabalho nos mostrou a central importância dos estudos sobre os fundamentos da matemática e sobre a lógica. A variedade de assuntos que podem ser pesquisados e aprofundados é imensa, e de fato o conhecimento particular das lógicas não clássicas oferece mesmo ao matemático a possibilidade de adentrar a campos do saber que são distantes dos usualmente tratados nos cursos de graduação em matemática, como as matemáticas fundamentadas em lógicas distintas da clássica, que hoje estão sendo usadas até mesmo em física, em ciência da computação e em outras áreas.

Acreditamos que seria extremamente interessante que no curso de matemática da UFSC, tanto bacharelado quanto licenciatura, deveriam incorporar disciplinas de fundamentos da matemática e de lógica, em especial de teoria axiomática de conjuntos, história do método axiomático (e sua evolução), lógica matemática, fundamentos axiomáticos da física e etc.

Referências Bibliográficas

[1] Arruda, A. I. , *A Evolução do Método Axiomático.* Separata da Revista Brasileira de Filosofia, São Paulo, 1964, páginas 209 a 221, Volume XIV, Fascículo 54.

[2] Carrion, R e da Costa, N. C. A. *Introdução à Lógica Elementar com o símbolo de Hilbert.* Porto Alegre, Ed. da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1988.

[3] da Costa, N. C. A. *Introdução aos Fundamentos da Matemática.* Porto Alegre, Globo, 1962.

[4] da Costa, N. C. A. e Krause, D. , *Notas de Lógica; Parte I: Lógicas Proposicionais Clássica e Paraconsistente.* Florianópolis, 2004.

[5] Davis, F. J. e Hersh, R. *A Experiência Matemática.* 2.ed. Rio de Janeiro, F. Alves, 1985.

[6] Kneale, W. e Kneale, M. *O Desenvolvimento da Lógica.* 3.ed. Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, 1991.

[7] Krause, D. , *Aspectos da Lógica Atual.* Revista Brasileira de Filosofia, São Paulo, 1989, páginas 220 a 237, Volume 38, Fascículo 155.

[8] Krause, D. *Introdução aos Fundamentos Axiomáticos da Ciência.* 1.ed. São Paulo, EPU, 2002.

[9] Mosterin, J. , *Conceptos y teorías en la ciencia.* Madrid, Alianza, 1987, páginas 111 a 130.

[10] Nidditch, P. H. , *The Development of Mathematical Logic.* Great Britain, Routledge & Kegan Paul Ltd, 1962.

[11] Suppes, P. , *Estudios de filosofía y metodología de la ciencia.* Madrid, Alianza, 1988, páginas 93 a 107.

[12] Wilder, R. L. *Introduction to the Foundations of Mathematics.* 2.ed. New York, J. Wiley, 1967.

Internet

[1] http://www.dcc.fua.br/~ruiter/afc/node1.html

[2] http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/cantor/estadio.htm

[3] http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/cantor/setavoadora.htm